

Das Kalman Filter wird 50 (Autor: Claude Baumann) v.1.4

„That's one small step for [a] man, one giant leap for mankind!“ⁱ

Als Neil Armstrong mit diesem großartigen Satz den Boden des Mondes betrat, waren sich Abermillionen vor den Bildschirmen der Erhabenheit des Momentes bewusst, obwohl kaum jemand überhaupt eine Vorstellung von den immensen Schwierigkeiten hatte, denen die Wissenschaftler und Techniker der NASA die Stirn geboten hatten, um das größte Vorhaben der Menschheitsgeschichte zu verwirklichenⁱⁱ. Von der endlosen Liste hochspezialisierter Produkte, welche die Mondlandung erst ermöglichten, wollen wir das unscheinbarste, wengleich für manche das wichtigste hervorheben, nämlich das *Kalman Filter (KF)*. Diese mathematische Methode wurde im Hauptprogramm des *Apollo Guidance Computer (AGC)* (siehe Abbildung 1) angewandt, der heute als das erste eingebettete System angesehen wird und dessen Aufgabe die Steuerung des Apollo-Navigationssystems war.

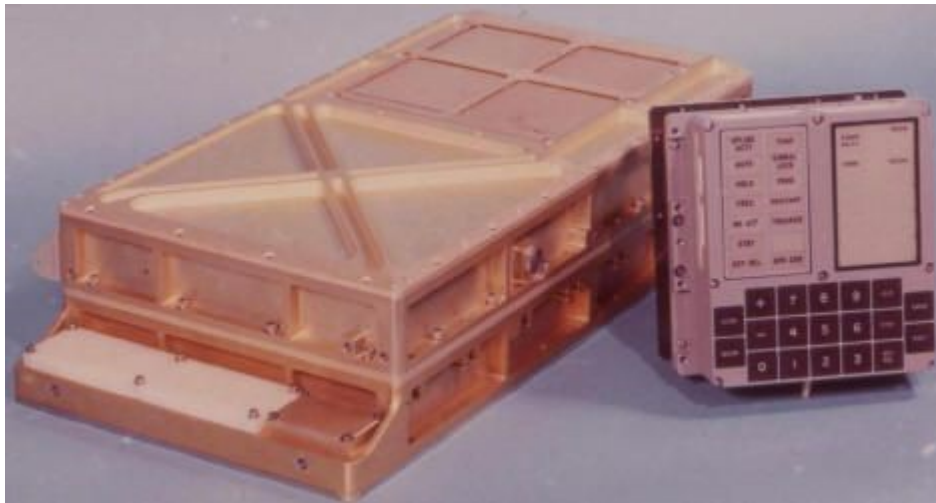


Abbildung 1: Der *Apollo Guidance Computer (AGC)* war das erste *embedded system* und nutzte darüber hinaus auch die erste Softwareimplementierung des Kalman Filters. (Photo: <http://www.bernd-leitenberger.de/computer-raumfahrt1.shtml>)

Aus heutiger Sicht erscheint es schwierig, die Rechenprobleme zu bewerten, mit denen sich die NASA Mathematiker herumplagen mussten. Einer von ihnen, Jack W. Crenshaw erklärt dies folgendermaßen: „*Wenige, die sich an die frühen NASA Projekte -Mercury, Gemini und Apollo- erinnern, begreifen in welchem Maße alles ohne Computer bewältigt wurde. Sicher, wir hätten niemals Eagle zur Mondoberfläche leiten können, ohne seinen Flugcomputer und dessen Software. Genau genommen, viele der hervorragendsten Entwicklungen im Bereich Echtzeit-Programmierung und Regeltechnik entstanden gerade aus diesen Bemühungen.*“ⁱⁱⁱ... Die Tatsache, dass die M.I.T. Ingenieure fähig waren, eine derart gute Software (eine der allerersten Anwendungen des Kalman Filters) in solch einen winzigen Computer zu packen, ist wahrhaft bemerkenswert.^{iv}“

1960 hatte der Mathematiker *Rudolf Emil Kalman* seinen bahnbrechenden Artikel veröffentlicht unter dem Titel, „*A new approach to linear filtering and prediction problems*“^v, worin er auf unerwartete Weise an das Problem des optimalen Beobachters herangeht. Kalman beschreibt seine Methode als optimalen Schätzer (*estimator*), der vergangene verrauschte Systemzustände anhand möglichst genauer mathematischer Modellierung und fehlerhafter Messungen glätten (*interpolieren*), aktuelle Zustände filtern und zukünftige voraussagen (*extrapolieren*) kann. Kalman erklärt, dass die Stärke der neuen Methode am

offensichtlichsten werde in theoretischen Untersuchungen und in numerischen Antworten zu komplexen, praktischen Problemen. Im letzteren Fall sei es vorteilhaft, auf Maschinenberechnungen zurückzugreifen^{vi}.

Für die NASA war es ein Glücksfall, dass Stanley F. Schmidt, ein prominentes Mitglied der *space task group* am *Langley Research Center*^{vii}, persönlicher Bekannter Rudolf Kalman's war. Während eines gelegentlichen Besuchs wurde es Schmidt klar, dass Kalman's Theorie am Navigations- und Kontrollproblem der Mondkapsel angewandt werden konnte. Im folgenden durchlief das Team jedoch große Schwierigkeiten, Kalman's Artikel zu verstehen und umzusetzen, wegen des relativ neuen Ansatzes der Zustandsraumdarstellung^{viii}, welche dynamische Systeme als Kette von Differentialgleichungen erster Ordnung im Zeitbereich darstellt, im Gegensatz zu den herkömmlichen Beschreibungsmethoden im Frequenz -oder Laplaceraum. Hinzu kamen ernsthafte Rundungsfehler am Computer, unvollständige statistische Modelle, systematische Messfehler, sowie Divergenzprobleme nichtlinearer Gleichungen. Es wurden schließlich alle Fragen gelöst, was aber dazu führte, dass in seiner ersten Anwendung der ursprüngliche Algorithmus in abgewandelter Form als *Extended Kalman Filter* (EKF) implementiert wurde. (In frühen Tagen bezeichnete man diese Variante als *Kalman-Schmidt Filter*.)



Abbildung 2: Rudolf Emil Kalman (Photo: http://www.ethlife.ethz.ch/archive_articles/080103-draperprize)

Rudolf Kalman wurde am 19. Mai 1930 als Sohn eines Elektroingenieurs in Budapest geboren. Während des zweiten Weltkrieges wanderte er mit seiner Familie nach Amerika aus. Er studierte am M.I.T., wo er 1953 und 1954 mit Bachelor resp. Master Degree abschloss. Im Jahre 1957 bekam er die Dokorenwürde (D. Sci.) an der Columbia Universität. Zunächst arbeitete er für das IBM Research Laboratory, Poughkeepsie, N. Y, dann von 1958 bis 1964 für das Research Institute for Advanced Study (RIAS), Baltimore. Er war Professor an der Stanford Universität von 1964 bis 1971, an der Universität von Florida von 1971 bis 1992. Parallel dazu hielt er seit 1973 einen Lehrstuhl an der ETH in Zürich, von dem er 1997 emeritierte. Sein Hauptforschungsgebiet ist die System -und Kontrolltheorie. Kalman erhielt mehrere hochdotierte Preise und Auszeichnungen, darunter 2005 den Kyoto Preis für Technologie, 2008 den begehrten Charles Stark Draper Prize und die National Medal of Science and Technology and Innovation, die ihm Ende 2009 von Präsident Obama verliehen wurde.

Was aber genau ist ein Kalman Filter? Bevor wir dieser Frage nachgehen, wollen wir uns mit folgender Aufgabe beschäftigen. Es soll eine Testanordnung aufgebaut werden, bei der ein Roboter Greifarm einen kleinen Ball aufzufangen versucht, der sich im freien Fall befindet. Dieser nimmt bei jedem Probelauf den gleichen Weg. Wie auf (Abbildung 3) angedeutet, misst ein bildverarbeitendes System mit Videokamera alle vier Hundertstel Sekunde die vertikale Position des fallenden Körpers mit einer Varianz $R = 9$. (Der Einfachheit halber, sei

zusätzlich angenommen, dass die jeweilige Positionierung ohne Verzögerung erfolgt. Die Fallhöhe beträgt 1m.)

Diese anschauliche Roboteraufgabe stellt hohe Anforderungen an das Kontrollsystem, obwohl anhand des Galileischen Fallgesetzes die Geschwindigkeit und die Position des fallenden Körpers leicht zu bestimmen sind, woraus günstige Ansteuerungen des Greifarmmotors abgeleitet werden können. Da aber minimale Abweichungen insbesondere durch den Luftwiderstand, zudem ungenaue Angaben der Beschleunigung, sowie die recht hohe Messgenauigkeit zu beachten sind, wird es dem Roboter in vielen Fällen nicht gelingen, den Ball zu fangen. (Störende Effekte sind vermehrt zu erwarten bei einer Abwandlung der Aufgabe, bei welcher der Ball eine schiefe Ebene hinabrollt, wegen unscheinbarer Unebenheiten, sowie Kugelformabweichungen des Balles.)

Die Herausforderungen liegen eindeutig auf der Seite der Beobachtung des Vorganges. Es stellt sich die Frage, ob es möglich ist, die Position des Balles so abzuschätzen, dass sämtliche Fehler minimiert werden. Eine Möglichkeit wäre es -da ja das mathematische Modell des freien Falles bekannt ist- zum richtigen Zeitpunkt aus den erhaltenen Messdaten eine Gaußsche Regressionskurve 2^{ten} Grades zu berechnen, anhand derer zukünftige Positionen extrapoliert werden könnten. Da es aber gilt, gerade den rechten Zeitpunkt für das Einschalten des Greifarmmotors zu bestimmen, müsste diese Berechnung möglichst spät erfolgen, gegebenenfalls zur Sicherheit mehrmals wiederholt, um genügend Daten miteinzubeziehen, damit der günstigste Moment nicht verpasst wird. Für einen modernen Computer bedeuten solche statistischen Kalkulationen kein Problem. Wenn die Aufgabe aber zusätzlich erschwert wird, dass ein gängiges Mikrokontrollersystem die Kontrolle übernehmen soll, wie beispielsweise das mit dem Vision Subsystem v.2 (NXTCam-v2) von Mindsensors^{ix} ausgestattete LEGO[™] NXT[™] (cf. Abbildung 3), dann dürfte diese Methode wegen des Rechenaufwands kaum noch funktionieren. Bei einer derartigen Problemstellung wird man daher eher auf das diskrete Kalman Filter zurückgreifen. Die Problemklasse des *object tracking* ist sogar dessen typischstes Einsatzgebiet^x.

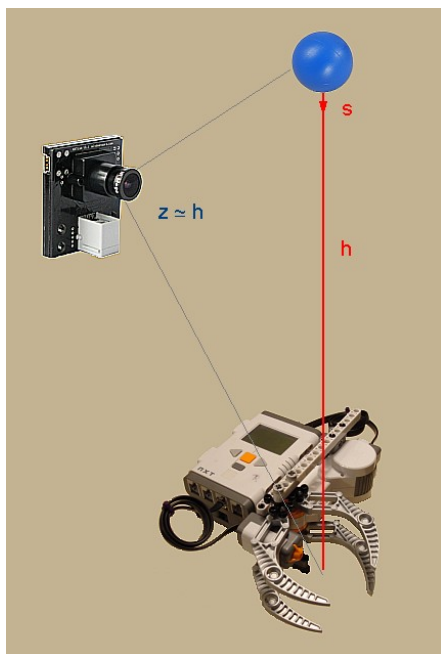


Abbildung 3: Der Roboter soll einen Ball nach dessen Fallhöhe h auffangen. Ein bildanalytisches Kamerasystem liefert in regelmäßigen Abständen eine ungenaue Positionierung z . Die Fallgeschwindigkeit s ergibt sich aus den Gleichungen des Fallgesetzes.

Peter S. Maybeck^{xi}, ein vielzitiertes Autor bezüglich des KF, umreißt die Methode als „*optimalen, rekursiven Algorithmus zur Datenverarbeitung*“. Das Wort *optimal* ist prägnant gewählt, um hervorzuheben, dass das „*KF optimal ist, gegenüber virtuell jedem Kriterium, das Sinn macht*“. Diese etwas verschlüsselte Formulierung beschreibt u.a. die Eigenschaft des KF, auf optimale Art und Weise aus unsicheren Messdaten eine Schätzung des Systemzustandes (in diesem Falle die Position und die Geschwindigkeit des Balles) zu gewinnen, indem die Fehler nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate minimiert werden.

Das Wort *rekursiv* in Maybeck's Beschreibung unterstreicht die Charakteristik des KF, eine neue Schätzung ausschließlich anhand der unmittelbar vorherigen Schätzung und der aktuellen Messung abzufertigen. Dies war sicher eine der Schlüsseleigenschaften zum Zeitpunkt des ersten Einsatzes des KF im *Apollo Guidance Computer*, wegen des kleinen 4kB(!) Kernspeichers. Durch die Rekursivität entfallen das Abarbeiten und die Speicherungen langer Datenketten, wie sie bei der Regressionsmethode nötig sind.

Die *Filtertätigkeit* des Algorithmus entspricht dem Herausarbeiten im Zeitbereich von relevanten Trends oder Frequenzen, welche von Rauschen überlagert sind. Unerwünschte Signalkomponenten werden somit eliminiert. Für die Apollo Mission bedeutete dies, dass der *AGC* die 3D-Flugbahn, sowie die ebenfalls dreidimensionale Orientierung der Raumkapsel aus einer Menge verrauschter Messdaten extrahieren konnte. Die Filterfunktion entspricht in vielen Punkten einem Tiefpassfilter. Gegenüber herkömmlichen digitalen Filtern gilt es aber hervorzuheben, dass beim KF zeitaufwendige Transformationen entfallen, da der Zeitbereich nie verlassen wird. Allerdings ist damit die Kontrolle über die Grenzfrequenz recht schwierig. Seine Stärke beweist das KF im Zusammenhang mit nicht-stationären Signalen, bei denen andere Methoden versagen. Außerdem kann es multiple Eingänge und Ausgänge bewältigen.

Greg Welch und Gary Bishop^{xii}, die seit Jahren die wohl am besten dokumentierte Internetseite zum KF unterhalten, erwähnen eine weitere wesentliche Eigenschaft des Kalman Filters, und zwar die Möglichkeit, zukünftige Systemzustände vorauszusagen. Auf der Basis des mathematischen Systemmodells und der vorherigen Schätzung des Systemzustandes berechnet das KF zunächst eine *a priori* Schätzung (*prediction*) des kommenden Systemzustands. Die Evolution der relevanten Statistik wird ebenfalls vorausgesagt, bevor der Algorithmus zum zweiten Schritt übergeht, der darin besteht, die Voraussage anhand der Messungen zu korrigieren. Dies ist wohl die wichtigste Fähigkeit des KF, da bei Ausbleiben einer zuverlässigen Messung das Filter immer noch auf die Vorausschätzung zurückgreifen kann. Außerdem erlaubt sie die Überbrückung des durch die Rückwärtsfilterung entstandenen Zeitversatzes zwischen Original- und Filtersignal. Das Original- und das gefilterte Signal werden auf diese Weise synchronisiert.

Wenden wir uns wieder unserem Beispiel zu. Zunächst gilt es eine günstige diskrete Schrittweite für den Zeitbereich zu bestimmen^{xiii}. Das von der Messeinheit gegebene Abtastintervall von 40ms ist sicherlich zu lang, da nach 1m freiem Fall eine solche Zeitdifferenz bereits zu Positionsunterschieden von etwa 20cm führen würde. Wenn eine Toleranz von 2cm angestrebt wird, lässt sich leicht überprüfen, dass die Schrittweite unter 4ms liegen muss.

Die **Zustandsgleichung** sieht dann folgendermaßen als diskrete Differenzgleichung aus:

$$x_i = A \cdot x_{i-1} + B \cdot u + w_i, \quad (1)$$

wobei

- der unbekannte Zustandsvektor aus den Komponenten h als Höhe des fallenden Balles und s als dessen Geschwindigkeit besteht, mit $x_i = \begin{pmatrix} h \\ s \end{pmatrix}_i$.
- $w_i = \begin{pmatrix} w_h \\ w_s \end{pmatrix}_i$ stellt das ebenfalls unbekannte Systemrauschen mit angenommener Kovarianzmatrix $Q = \begin{pmatrix} 0.02 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{pmatrix}$ dar. Es darf hier ohne weiteres davon ausgegangen werden, dass das Systemrauschen normalverteilt ist und im Mittel null ist^{xiv}.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist die sogenannte Zustandsübergangsmatrix (*state transition matrix*),
- mit $\Delta t = 4ms$.
- $u = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}g\Delta t^2 \\ -g\Delta t \end{pmatrix}$ ist die Störmatrix (*forcing function matrix* oder auch als *input matrix* bezeichnet).
- die Erdbeschleunigung wird mit $g = 9.81m/sec^2$ angenommen.
- der Parameter $B = 1$.

Die beiden Zustandsgleichungen nach dem Fallgesetz

$$\begin{cases} h_i = h_{i-1} + \Delta t \cdot s_{i-1} - \frac{1}{2} g \Delta t^2 + w_{h,i} \\ s_i = s_{i-1} - g \Delta t + w_{s,i} \end{cases}$$

werden somit zusammengefasst in Matrixform, entsprechend (Gl. 1):

$$\begin{pmatrix} h \\ s \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ s \end{pmatrix}_{i-1} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}g\Delta t^2 \\ -g\Delta t \end{pmatrix} + w_i$$

Hinzu kommt nun die **Messgleichung**:

$$z_i = H \cdot x_i + v_i, \quad (2)$$

wobei

- z_i die vom bildanalysierenden System gemessene Ballposition ist,
- $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, die Messmatrix und
- v_i das um Null normalverteilte Messrauschen, das, wie bisher angenommen, eine Varianz $R = 9$ hat.

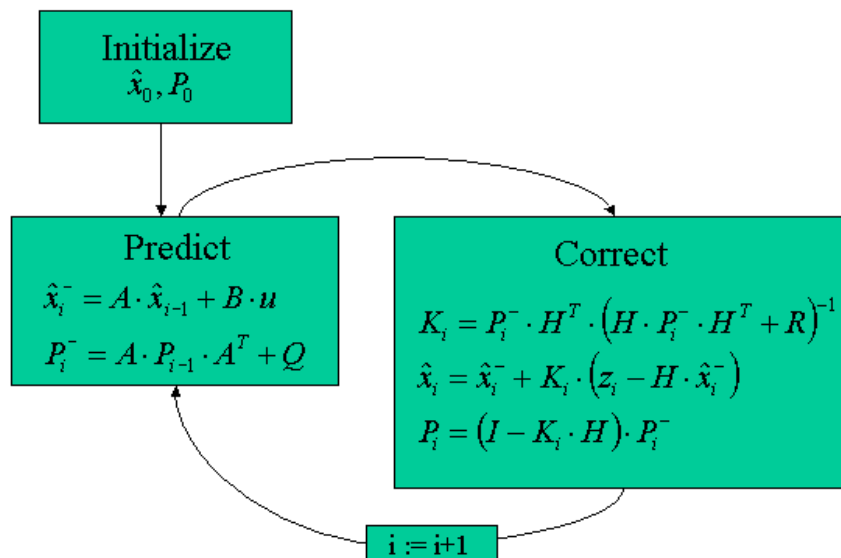


Abbildung 4: Der Kalman Filter Algorithmus schematisch dargestellt.^{xv}

Kalman's Algorithmus (siehe Abbildung 4) sieht nun vor, nach der Initialisation^{xvi}, im ersten Schritt die Zustandsgleichung (Gl. 1) als vorläufige Schätzung \hat{x}_i^- des Systemzustandes anzuwenden, allerdings ohne das unbekannte Systemrauschen, sowie unter Einbeziehung der vorherigen Schätzung anstelle des vergangenen Systemzustandes. Da die Schätzung \hat{x}_i^- vor der Korrektur vorgenommen wird, welche anhand der Messung erfolgt, wird das hochgestellte Minuszeichen angefügt. Dieser Schätzwert wird aus dem gleichen Grund *a priori* Schätzung oder *prediction* genannt. Das Zirkumflex-Zeichen auf dem x -Symbol besagt, dass es sich bei dem Wert lediglich um eine Abwägung des Systemzustands handelt. Auch wird nun die Fehlervarianz P_i^- (*a priori* Kovarianzmatrix) dieser Schätzung anhand der vorigen berechnet. Es wird dabei die bekannte oder angenommene Kovarianzmatrix Q des Systemrauschens hinzu addiert, womit sich die Fehlervarianz zunächst etwas verschlechtert. Dies besagt, dass gegenüber der vorherigen Gesamtschätzung die vorausschauende Schätzung weniger sicher ist, da sie ja ausschließlich auf dem mehr oder weniger exakten mathematischen Modell basiert.

Im Korrekturschritt wird als erstes der wichtige Parameter K_i , bekannt als *Kalman Gain*, bestimmt. In diesem Beispiel hat

$$K_i = \begin{pmatrix} k_h \\ k_s \end{pmatrix}_i$$

die Dimension 2×1 , wobei zu bemerken ist, dass der untere Skalarwert k_s völlig ohne Belang ist, da ja nur die Position gemessen wird. Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass die Formel zur Berechnung des *Kalman Gains* das Resultat eines recht mühseligen mathematischen Beweises ist, der zeigt dass mittels dieses Parameters die Schätzfehler tatsächlich minimiert werden^{xvii}. Je nach Sachlage schwankt im vorliegenden Beispiel dessen Wert zwischen 0 und 1, wobei $k_h = 0$ besagt, dass in der folgenden Schätzgleichung ausschließlich dem vorausschauenden Schätzwert geglaubt wird, während $k_h = 1$ ausdrückt, dass in diesem Falle nur der Messung vertraut wird. Diese Tatsache wird nun genutzt, da ja in unserem Beispiel nicht zu jedem

Zeitpunkt eine neue Messung zur Verfügung steht. Ist demnach keine neue Messung erfolgt, wird der *Kalman Gain* einfach null gesetzt.

Der *a posteriori* Schätzwert \hat{x}_i und die dazugehörige Fehlervarianz P_i werden also gemäss der Größe des *Kalman Gains* ermittelt. Es wäre sicher möglich diese Werte auf anderem Wege, anhand einer anderen Methode als dem KF zu bestimmen, aber keinesfalls können sie verbessert werden, da sie optimal sind. Die *I*-Matrix ist in diesem speziellen Fall die 2×2

Einheitsmatrix $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Bemerkte sei noch, dass unter der Bedingung, dass sich die

Varianzen R und Q während des gesamten Prozesses nicht ändern, K_i und P_i sehr schnell -normalerweise nach weniger als zehn Iterationen- auf optimale Werte konvergieren. Die schnelle Konvergenz ist eine weitere hervorzuhebende Eigenschaft der Methode.

Es lohnt sich allenfalls, sich näher mit den Kalman Filter Berechnungen zu beschäftigen. Wenngleich dazu eine gute Kenntnis linearer Algebra^{xviii} erforderlich ist. Es zeigt sich nämlich, wie im gegebenen Beispiel, dass sich die Matrizengleichungen in vielen Anwendungen leicht in Skalggleichungen umschreiben lassen, was ihren Einsatz in Mikrokontrollerapplikationen erleichtert, da nicht alle Programmierumgebungen mehrdimensionale Arrays zulassen, und sogar über Matrizenbibliotheken verfügen. Dies mag mancherorts als unadäquat betadelt werden, aber bereits bei der ersten Kalman Filter Implementierung im *AGC* plagten sich die Programmierer mit derartigen Problemen herum. Stanley Schmidt schreibt dazu: „Später, als wir die Software darauf vorbereiteten, die Kalman Filter Matrizenoperationen durchzuführen, mussten wir all unsere eigenen matrizenmanipulierenden Abläufe selbst schreiben. Wir fanden aber schnell heraus, dass das doppelte Indexieren, das für die Matrizenoperationen gebraucht wurde, derart langsam lief, dass wir die gesamten Unterprogramme umschreiben mussten, damit sie einfaches Indexieren benutzen. Andernfalls hätte eine mondumkreisende Bahn mit dem Kalman Filter Stunden an Rechenzeit gebraucht.“^{xix}

Aus der in (Abbildung 5) dargestellten LabVIEW Simulation wird ersichtlich, wie effizient das Kalman Filter die Bahn des Balles rekonstruieren kann. (Abbildung 6) zeigt insbesondere, dass sich der Schätzfehler innerhalb der geforderten 2cm befindet. In vielen Fällen ist es sehr hilfreich, dass das Kalman Filter nicht nur die Schätzung, sondern auch eine Abgrenzung deren Güte ausgibt. Da generell die gefilterten Daten in Kontrollsystemen weiterverarbeitet werden, ist dies eine hervorragende zusätzliche Eigenschaft. Es ist daher zu erwarten, dass die praktische Anwendung des KF in unserem Beispiel es ermöglicht, trotz weniger Messdaten, den Ball zu fassen.

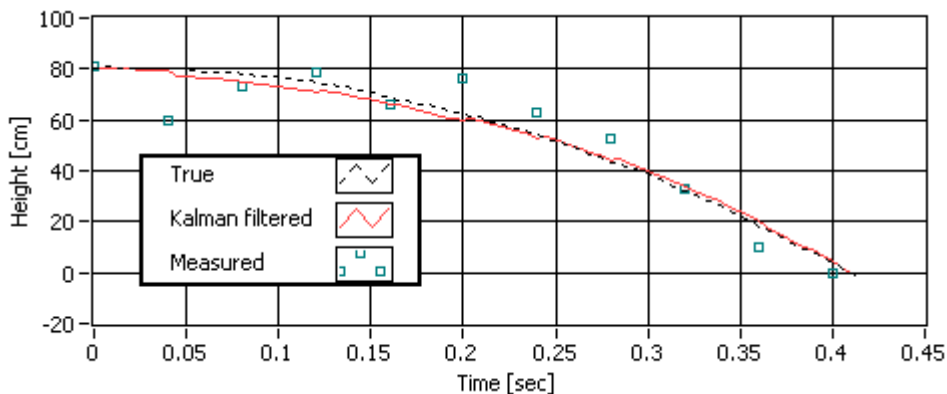


Abbildung 5: Fallparabel geschätzt durch das Kalman Filter. (LabVIEW-Simulation).

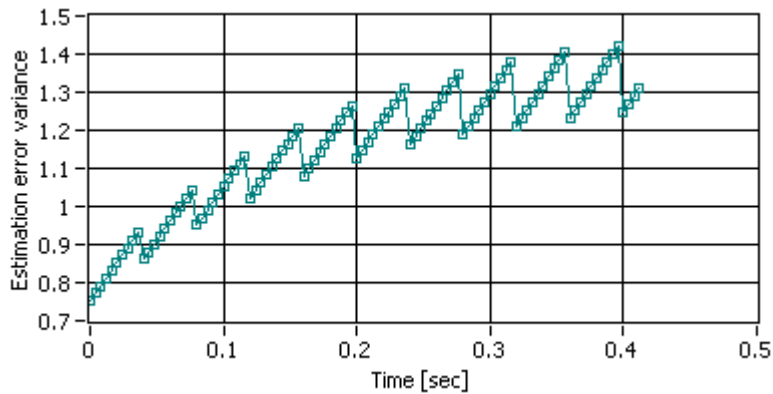


Abbildung 6: Entwicklung der Schätzfehlervarianz. Typisch ist der sägezahnartige Verlauf, da sich die Varianz zwischen den einzelnen Messungen stetig verschlechtert.

Das Kalman Filter ist gewöhnungsbedürftig. Insbesondere die Modellisierung im Zeitbereich über die Zustandsraumdarstellung mag manchen davon abschrecken. Es erfordert in der Tat einiges an Lernaufwand. Aber, ist man einmal mit den Prinzipien vertraut, und hat man mit geeigneter Software wie MATLAB^{xx} oder LabVIEW etliche Simulationen erfolgreich durchgeführt, ist der Zugang zum KF geschafft, und den praktischen Implementierungen und ebenso der tieferen Erkundung steht nichts mehr im Wege. Dem Autor dieses Artikels ist es jedenfalls auf Anhieb gelungen, gleich in mehreren LEGO Roboteranwendungen das Kalman-Filter zu implementieren, so bspw. in einer Art *in-door* GPS-System, das präzise Roboterortungen erlaubt^{xxi}, oder auch in einem ambitionierten Projekt der Roboter-Schallortung^{xxii}.

Das KF erfreut sich einer immer wachsenden Beliebtheit. In der Flugzeug- und Raumfahrttechnik, in der medizinischen Technologie, in Nachrichtentechnik und Gerätesteuerung aller Art ist es jedenfalls seit Jahrzehnten nicht mehr wegzudenken. Doch auch in mittlerweile alltäglichen Apparaten findet es seine Anwendung. So dürften die meisten GPS-Systeme damit funktionieren. Es sieht demnach aus, dass sich die Applikationen der Methode, wegen deren überaus zahlreichen positiven Eigenschaften in absehbarer Zukunft noch mehr als bisher vervielfältigen werden. Jedenfalls darf das Kalman Filter zu den wichtigsten mathematischen Errungenschaften überhaupt gezählt werden. Wir wünschen ihm daher und selbstredend seinem Erfinder, der dieses Jahr seinen 80^{ten} Geburtstag feiern wird, *ad ultos annos*.

- ⁱ Neil Armstrong auf dem Mond am 21. Juli 1969, 2:56 UTC.
- ⁱⁱ als Folge der berühmten Rede J. F. Kennedy's vom 25. Mai 1961 an den amerikanischen Kongress.
- ⁱⁱⁱ J. W. Crenshaw, *Math Toolkit for real-time programming*, Kansas: CMP Books, (2000), preface XX.
- ^{iv} M. Reed, *An interview with J. W. Crenshaw*, on-line site www.trs-80.org, Jan/Feb., (2009), <http://www.trs-80.org/interview-jack-crenshaw/>, [abgerufen, Okt. 2009]
- ^v R. E. KALMAN, *A new approach to linear filtering and prediction problems*, Transactions of the ASME-Journal of Basic Engineering, 82, Series D, (1960), S. 35-45.
- ^{vi} Ibid. S. 36.
- ^{vii} L. A. McGEE, S. F. SCHMIDT, *Discovery of the Kalman Filter as a Practical Tool for Aerospace and Industry*, NASA Technical Memorandum 86847, Nov., (1985).
http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19860003843_1986003843.pdf, [abgerufen Okt. 2009]
- ^{viii} B. FRIEDLAND, *Control system design, An introduction to state-space methods*, Dover ed., New York, (2005).
- ^{ix} <http://www.mindsensors.com/> [abgerufen, Dez. 2009]
- ^x R. SIEGWART, I. R. NOURBAKHS, *Introduction to autonomous mobile robots*, M.I.T. Press, MA, (2004), S. 227 ff.
- ^{xi} P. S. MAYBECK, *Stochastic models, estimation, and control*, Vol.1, New York: Academic Press, (1979).
- ^{xii} G. WELCH, G. BISHOP, *An introduction to the Kalman Filter*, TR-95-041, Department of Computer Science, University of North Carolina at Chapel Hill, (Update 2006). <http://www.cs.unc.edu/~welch/kalman/> [abgerufen Dez. 2009]
- ^{xiii} H. SCHLITT, *Systemtheorie für stochastische Prozesse*, Berlin: Springer, (1992), S. 66-71.
- ^{xiv} Das um Null gauss-verteilte Rauschen ist eine der Vorbedingungen für die Zulässigkeit des KF Algorithmus.
- ^{xv} Schema nach G. WELCH, G. BISHOP, op. cit., S.6.
- ^{xvi} Man beachte dass der Initialwert der Fehlervarianz P_0 niemals null sein sollte.
- ^{xvii} z.B. angeführt in R. F. STENGEL, *Optimal control and estimation*, Dover ed., New York, (1994), S. 299ff.
- ^{xviii} Eine exzellente Einführung in lineare Algebra findet man unter <http://tutorial.math.lamar.edu/download.aspx> [abgerufen Dez. 2009].
- ^{xix} op. cit. S. 3.
- ^{xx} M. S. GREWAL, A. P. ANDREWS, *Kalman filtering: theory and practice using MATLAB*, 3rd edition, John Wiley and sons, New Jersey, (2008).
- ^{xxi} http://www.convict.lu/html/rob/ir_us_xxx_222_333.htm, [abgerufen, Dez. 2009].
- ^{xxii} http://www.convict.lu/html/rob/spatial_sound_localizing_robot_revisited.htm, [abgerufen, Dez. 2009]. Dazu auch: L. KNEIP, C. BAUMANN, *Binaural model for artificial spatial sound localization based on interaural time delays and movements of the interaural axis*, The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 124, Ausgabe 5, November (2008), S. 3108-3119.